Mathematik

Bestimmung konjugierter Punkte im Sinne der Variationsrechnung mit Anwendung elliptischer Funktionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde bei der Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Rudolf Jacob
aus Warmbrunn i. Rsgb.

Promotion: 22. Juli 1931

Breslau 1931.
Druck der Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G. m. b. H.

Referent: Prof. Dr. Kneser.
Korreferent: Prof. Dr. Radon.

Examen rigorosum: 19. Juni 1929.

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Für die Bewegung unter dem Einfluß einer Kraft, die durch das Potential $U = \varepsilon r^n$ ($\varepsilon = \pm 1$) gegeben ist, ergibt sich nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung mithilfe der Variationsrechnung[1])

1a. $$d\varphi = \frac{a\, dr}{r \sqrt{r^3(\varepsilon r^n + h) - a^2}},$$ wobei h die Energiekonstante ist.

Die Diskussion der Extremalen und die Untersuchung über konjugierte Punkte im Sinne der Variationsrechnung, d. h. solcher Punkte, in denen die Extremumseigenschaft authört, ist allgemein für ganzzahlige Werte von n von Kober[2]) durch direkte Behandlung des durch (1 a) gegebenen Integrals durchgeführt worden. In den Fällen $n = 1, 4, 6, -3, -4, -6$ lassen sich die Extremalen durch elliptische Funktionen ausdrücken[3]). Sie erscheinen nach Einführung eines Parameters in der Form

$r = r\ (u, a, b)$; $\varphi = \varphi\ (u, a, b)$.

Um die konjugierten Punkte zu bestimmen, muß man den Verlauf der Funktion

$$\Phi(u) = \frac{\frac{\partial (r, \varphi)}{\partial (u, a)}}{\frac{\partial (r, \varphi)}{\partial (u, b)}}$$ diskutieren. Ist $\Phi(u_1) = \Phi(u_2)$, so sind die Punkte $r = r\ (u_1, a, b)$, $\varphi = \varphi\ (u_1, a, b)$ und $r = r\ (u_2, a, b)$ $\varphi = \varphi\ (u_2, a, b)$ konjugierte Punkte[4]). In dieser Weise sind folgende Fälle behandelt worden: mit Jacobischen Funktionen der Fall $n = -4$, $\varepsilon = +1$, $h < 0$ von Koschmieder[5])

---

[1]) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. Auflage 1925, § 6.
[2]) Dissertation Breslau 1910.
[3]) Whittaker, Analytische Dynamik § 48.
[4]) Kneser, Variationsrechnung, § 14.
[5]) Dissertation Breslau 1910.

und der Fall $n = -3$ von Merget[1]), ferner mit Weierstraßschen Funktionen die Fälle $n = -4$, $\varepsilon = +1$, $h < 0$; $n = 1, 4$; $n = 6$, $\varepsilon = -1$, $h > 0$ von Sachs[2]). Im Vorliegenden sollen die Fälle $n = -4$, $\varepsilon = +1$, $h > \frac{a^4}{4}$; $n = -3$, $\varepsilon = +1$; $n = 4$ und $n = 1$ mit Jacobischen Funktionen behandelt werden. Folgende Umstände lassen die Behandlung der Aufgabe lohnend erscheinen: Im Laufe der Rechnung wird die Aufstellung einiger allgemeinerer Beziehungen elliptischer Funktionen erforderlich. So werden die Ableitungen der Funktionen $\Theta(u)$, $H(u)$, $Z(u)$ und $\Pi(u, \alpha)$ nach dem Modul k berechnet. Ferner werden Formeln für $E(u + iK')$, $\Pi(u + iK', \alpha)$ und $\Pi(u, \alpha + iK')$ aufgestellt. Weiterhin werden Transformationsformeln für $\Pi(u, \alpha; k)$ und $E(u, k)$ von komplexem auf reellen Modul angegeben. Endlich werden Ungleichungen für die Größen $2(1-k^2+k^4)E(u) - k'^2(2-k^2)u$ und $3E(u) - (2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})u$ angegeben und zwar an der Stelle $u = K$ für reelles k und an der Stelle $u = K + iK'$ für komplexes k. Schließlich sei in diesem Zusammenhang angeführt, daß in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren angegeben wird, welches es ermöglicht, die Jacobischen elliptischen Funktionen auch in Fällen zu benutzen, in denen ihre Anwendung zunächst ungeeignet erscheint.

---

[1]) Prüfungsarbeit beim P. S. K. Breslau.
[2]) Math. Zeitschrift, Bd. 27.

1. Kapitel.

§ 1. Ableitung elliptischer Funktionen nach dem Modul.

Es soll zunächst $\frac{\partial \Theta(u)}{\partial k^2}$ berechnet werden.

Es ist $\Theta(u) = \vartheta_0(v)$ $\left(v = \frac{u}{2K}\right)$. Mithilfe der Gleichung

1. $\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v,\tau)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v,\tau)}{\partial \tau}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ [1]) ergibt sich

$$\frac{\partial \Theta(u)}{\partial k^2} = \left(\frac{K^2}{\pi i} \frac{\partial^2 \Theta(u)}{\partial u^2} - \frac{u}{K} \frac{dK}{d\tau} \frac{\partial \Theta(u)}{\partial u}\right) \frac{d\tau}{dk^2}.$$

Es ist $K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2$. Mithilfe von 1., ferner

$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = (\pi \vartheta_3^2)^2 k^2$ [2]) und $E = K - \frac{1}{4K} \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}$ [3]) folgt

2. $\frac{dK}{d\tau} = -\frac{2iK^2}{\pi}(k'^2 K - E)$.

Es ist $k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$. Mithilfe von 1., ferner

$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = (\pi \vartheta_3^2)^2 k'^2$ [4]) folgt

3. $\frac{dk^2}{d\tau} = \frac{4i}{\pi} k^2 k'^2 K^2$. Führt man noch ein

$Z(u) = \frac{d}{du}\left[\lg \Theta(u)\right] = E(u) - \frac{E}{K} u$, so folgt

4. $\frac{\partial \Theta(u)}{\partial k^2} = \Theta(u)\left(-\frac{E(u)}{4k^2 k'^2} + \frac{p^2 u^2}{4k^2 k'^2} - \frac{dn^2 u}{4k^2 k'^2} + \frac{p}{4k^2 k'^2} + \frac{u E(u)}{2k^2} - \frac{p u^2}{2k^2}\right)$,

wobei gesetzt wurde $p = \frac{E}{K}$. Hieraus folgt leicht

---

[1]) Krause, Theorien der ell. Funktionen, 1912, Seite 18, 19 und 20.
[2]) Krause, S. 72. [3]) Krause, S. 111. [4]) Krause, S. 72.

5. $$\frac{\partial Z(u)}{\partial k^2} = -\frac{cn^2 u\, E(u)}{2k'^2} + \frac{sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{2k'^2} + \frac{dn^2 u\, u}{2k^2} - \frac{p\,u}{k^2} + \frac{p^2 u}{2k^2 k'^2}$$

Es ist $\Pi(u, \alpha) = \frac{1}{2}\left[\lg\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + 2\,u\,Z(\alpha)\right]$. Mithilfe der

6. Gleichung $E(u+v) = E(u) + E(v) - k^2 sn\,u\,sn\,v\,sn(u+v)$,

ferner nach 4. und 5. folgt $\frac{\partial \Pi(u,\alpha)}{\partial k^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{E(\alpha)\,E\,u}{k^2 k'^2}\right.$

$$-\frac{s_1 c_1 d_1 s^2 E(u)}{k'^2 N} - \frac{s_1^2 E(\alpha)\,s\,c\,d}{k'^2 N} - \frac{s_1 c_1 d_1 s\,c\,d}{k'^2 N} - \frac{d_1^2 E(\alpha)\,u}{k^2 k'^2}$$

$$\left. -\frac{\alpha\,E(u)}{k^2} + \frac{s_1 c_1 d_1 s^2 u}{N} + \frac{s_1^2 \alpha\, s\,c\,d}{N} + \frac{d_1^2 \alpha\, u}{k^2} + \frac{s_1 c_1 d_1 u}{k'^2}\right],$$

wobei gesetzt wurde $sn\,u = s$, $cn\,u = c$, $dn\,u = d$, $sn\,\alpha = s_1$, $cn\,\alpha = c_1$, $dn\,\alpha = d_1$ und $1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 u = N$.

Bei Koschmieder[1]) finden sich folgende Formeln

8. $$\begin{cases} \frac{\partial sn\,u}{\partial k^2} = \frac{s\,c^2}{2k'^2} - \frac{c\,d\,E(u)}{2k^2 k'^2} + \frac{c\,d\,u}{2k^2}; & \frac{\partial cn\,u}{\partial k^2} = -\frac{s^2 c}{2k'^2} \\ + \frac{s\,d\,E(u)}{2k^2 k'^2} - \frac{s\,d\,u}{2k^2}; & \frac{\partial dn\,u}{\partial k^2} = -\frac{s^2 d}{2k'^2} + \frac{s\,c\,E(u)}{2k'^2} - \frac{s\,c\,u}{2}; \\ \frac{\partial E(u)}{\partial k^2} = \frac{s\,c\,d}{2k'^2} - \frac{E(u)\,c}{2k'^2} - \frac{s^2 u}{2}. \end{cases}$$

Aus 2. und 3. folgt

9. $\frac{dK}{dk^2} = \frac{E - k'^2 K}{2k^2 k'^2}$, ferner aus 8. und 9.

10. $\frac{dE}{dk^2} = \frac{E-K}{2k^2}$.

§ 2. Vermehrung des Arguments um i K'.

Es bestehen die Gleichungen[2])

11. $$sn(u + iK') = \frac{1}{k\,sn\,u}, \quad cn(u+iK') = -\frac{i\,dn\,u}{k\,sn\,u},$$
$$dn(u+iK') = -\frac{i\,cn\,u}{sn\,u}.$$

---

[1]) Koschmieder, Dissertation, Seite 12.

[2]) Krause, Seite 54.

Wir fügen noch einige weitere Formeln hinzu. Aus

12. $E(u) = u\frac{E}{K} + \frac{1}{2K}\frac{d}{dv}\lg \vartheta_0(v)$ [1]) und

13. $\vartheta_0\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = i\, e^{-\frac{\pi i}{2}\left(2v + \frac{\tau}{2}\right)} \vartheta_1(v)$ [2]) folgt

14. $E(u + iK') = E(u) + \frac{cn\, u\, dn\, u}{sn\, u} + i(K' - E')$

wobei auch auf folgende Gleichungen verwiesen wird

15. $\vartheta_2\, \vartheta_3\, (\vartheta_0\, v\, \vartheta_1'\, v - \vartheta_1\, v\, \vartheta_0'\, v) = \vartheta_0\, \vartheta_1'\, \vartheta_2\, v\, \vartheta_3\, v$ [3])

16. $\vartheta_1' = \pi\, \vartheta_0\, \vartheta_2\, \vartheta_3$ [4]) und

$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$. Aus 11. folgt ferner

17. $\Pi(u + iK', \alpha) = \frac{1}{2}\left[\lg \frac{H(u-\alpha)}{H(u+\alpha)} + 2uZ(\alpha)\right] + \frac{\pi i \alpha}{2K} + iK'Z(\alpha)$ und

18. $\Pi(u, \alpha + iK') = \frac{1}{2}\left[\lg \frac{H(u-\alpha)}{H(u+\alpha)} + 2uZ_1(\alpha)\right] + \frac{\pi i}{2}$, wobei gesetzt wurde $Z_1(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\lg \Theta_1(\alpha)\right]$.

§ 3. Jacobische Funktionen bei komplexem Modul.

Wir suchen für den Fall, daß der Modul dem komplementären konjugiert komplex ist, eine Beziehung zu solchen Jacobischen Funktionen, deren Modul reell ist und zwischen Null und 1 liegt. Dies erreichen wir durch die Transformation

19. $\tau' = \frac{1+\tau}{1-\tau}$ der entsprechenden Thetafunktionen.[5])

Wir setzen folgende Bezeichnungen fest. Die gegebenen Jacobischen Funktionen mögen das Argument u und den Modul k haben, die entsprechenden Thetafunktionen mögen das Argument v' und das Periodenverhältnis τ' haben. Die transformierten Thetafunktionen mögen das Argument v und das Periodenverhältnis τ haben und die zu diesen gehörigen

[1]) Krause, Seite 111. [2]) Krause, Seite 23. [3]) Krause, Seite 28.
[4]) Krause, Seite 29. [5]) Krause, Nr. 15 u. 21.

Jacobischen Funktionen mögen das Argument u_1 und den Modul k_1 haben. Dann bestehen zwischen k und k_1 die Beziehungen[1])

20. $$k = \frac{j}{2}\,\frac{k_1 - i k_1'}{\sqrt{k_1 k_1'}},\quad k' = \frac{1}{2j}\,\frac{k_1 + i k_1'}{\sqrt{k_1 k_1'}}$$ und umgekehrt

21. $$k_1 = \frac{1}{2j}\,\frac{k + i k'}{\sqrt{k k'}},\quad k_1' = \frac{j}{2}\,\frac{k - i k'}{\sqrt{k k'}},$$ wobei gesetzt ist $j = e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Da k und k′ konjugiert komplex sind, kann man setzen $k^2 = \frac{1}{2} + a i$, $k'^2 = \frac{1}{2} - a i$. Nach 20. ergibt sich

22.
$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}}\right) \\ k_1' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}} \mp \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}}\right), \end{cases}$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $a \gtrless 0$.

Nach Krause bestehen die Gleichungen[2])

23.
$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u,k) = \dfrac{2j\sqrt{k_1 k_1'}\,\operatorname{sn}(u_1,k_1)\,\operatorname{dn}(u_1,k_1)}{1 - k_1(k_1 - i k_1')\operatorname{sn}^2(u_1,k_1)}, \\ \operatorname{cn}(u,k) = \dfrac{1 - k_1(k_1 + i k_1')\operatorname{sn}^2(u_1,k_1)}{1 - k_1(k_1 - i k_1')\operatorname{sn}^2(u_1,k_1)}, \\ \operatorname{dn}(u,k) = \dfrac{\operatorname{cn}(u_1,k_1)}{1 - k_1(k_1 - i k_1')\operatorname{sn}^2(u_1,k_1)}, \end{cases}$$ wobei

$u = 2j\sqrt{k_1 k_1'}\,u_1$.

Es sollen noch einige weitere Transformationsformeln abgeleitet werden. Mit Benutzung der Gleichung

24. $$e^{\frac{2\pi i v^2}{1-\tau}}\,\vartheta_1(v',\tau') = \frac{j\,\vartheta_3(0,\tau)}{\vartheta_0(0,\tau)\,\vartheta_2(0,\tau)}\,\vartheta_1(v,\tau)\,\vartheta_3(v,\tau)$$[3]) erhält man für $\Pi(u,\alpha;k)$, wenn man zunächst nach 18. $\alpha = \beta + i K'$ setzt,

[1]) Krause, Seite 61. [2]) Krause, Seite 61. [3]) Krause, Seite 45.

25. $\Pi(u,\alpha;k)=\frac{1}{2}\left[\lg\frac{H(u_1-\gamma,k_1)\,\Theta_1(u_1-\gamma,k_1)}{H(u_1+\gamma,k_1)\,\Theta_1(u_1+\gamma,k_1)}+2u_1\big(Z_1(\gamma,k_1)\right.$

$\left.+Z_2(\gamma,k_1)\big)\right]+\frac{\pi i}{2}$, wobei $\beta=2j\sqrt{k_1 k_1'}\,\gamma$ u. $Z_2(u)=\frac{d}{du}\lg\Theta_1(u)$.

Wir wollen noch $E(u,k)$ transformieren. Wir setzen dabei $\vartheta_\alpha(0,\tau')=\Theta_\alpha(\alpha=0,2,3)$.

Ausgehend von 12. folgt mit Benutzung der Gleichungen $E=K-\frac{1}{4K}\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}$ [1]) und $\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}-\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}=(\pi\Theta_3^2)^2$ [2])

26. $E(u,k)=\frac{1}{\pi\Theta_3^2}\left(-\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}v'+\frac{\vartheta_0'(v',\tau')}{\vartheta_0(v',\tau')}\right)$.

Wir gehen von τ' zu τ über. Mithilfe der Gleichung

$\vartheta_2(v',\tau')=e^{-\frac{2\pi i v^2}{1-\tau}}[C_1\vartheta_2^2(v,\tau)+C_2\vartheta_1^2(v,\tau)]$, wobei $v'=\frac{2v}{1-\tau}$, $C_1=\frac{\Theta_2}{\vartheta_2^2}$ und $C_2=j^{-1}\frac{\Theta_0}{\vartheta_2^2}$ [3]) erhält man

$-\frac{1}{\pi\Theta_3^2}\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}v'=\frac{(1-\tau)v}{\pi\Theta_3^2}\left(\frac{2\pi i}{1-\tau}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}-\frac{C_2}{C_1}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_2^2}\right)$. Aus

27. $\Theta_0^2=\frac{1}{2}(1-\tau)(\vartheta_2^2+i\vartheta_0^2)$ u. $\Theta_2^2=\frac{1}{2}i(1-\tau)(\vartheta_2^2-i\vartheta_0^2)$ [4])

folgt $\Theta_0\Theta_2=\pm\frac{j}{2}(1-\tau)\vartheta_3^2$. Man entscheidet, daß das obere Zeichen gilt, indem man $\tau=i\ (=\tau')$ setzt und die

28. Gleichung $\Theta_3^2=j(1-\tau)\vartheta_0\vartheta_2$ [5]) verwendet. Es ist also

29. $\Theta_0\Theta_2=\frac{j}{2}(1-\tau)\vartheta_3^2$. Mithilfe von 10., 27., 28. u. 29. folgt

$-\frac{1}{\pi\Theta_3^2}\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}v'=\frac{v}{\pi j\vartheta_0\vartheta_2}\left[\frac{2\pi i}{1-\tau}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right.$

$\left.+i\pi^2\vartheta_0^2(\vartheta_2^2+i\vartheta_0^2)\right]$.

Jetzt formen wir den zweiten Teil von 26. um. Aus

[1]) Krause, Seite 111. [2]) Krause, Seite 72. [3]) Krause, Seite 45.
[4]) Krause, Seite 45. [5]) Krause, Seite 44.

$\vartheta_0(v', \tau') = j^{-1} e^{-\frac{2\pi i v^2}{1-\tau}} (C_1 \vartheta_1^2 v + C_2 \vartheta_2^2 v)$ [1]) folgt mithilfe von 27., 28. und 29. $\frac{1}{\pi \Theta_3^2} \frac{d}{d v'} \lg \vartheta_0(v', \tau') = \frac{1}{\pi j \vartheta_0 \vartheta_2}$

$$\times\left[-\frac{2\pi i v}{1-\tau} + \frac{(\vartheta_0^2 + i\vartheta_2^2)\vartheta_1 v \vartheta_1' v + \vartheta_3^2 \vartheta_2 v \vartheta_2' v}{(\vartheta_0^2 + i\vartheta_2^2)\vartheta_1^2 v + \vartheta_3^2 \vartheta_2^2 v}\right].$$

Mithilfe der Gleichungen

$\vartheta_0^2 \vartheta_1^2 v + \vartheta_3^2 \vartheta_2^2 v = \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 v$ [2]), $\vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_0 v \vartheta_1' v - \vartheta_1 v \vartheta_0' v) = \vartheta_0 \vartheta_1' \vartheta_2 v \vartheta_3 v$ [3]), $\vartheta_0 \vartheta_3 (\vartheta_3 v \vartheta_0' v - \vartheta_0 v \vartheta_3' v) = \vartheta_2 \vartheta_1' \vartheta_1 v \vartheta_3 v$ [3]) ergibt sich unter Verwendung von 16.

$$\frac{1}{\pi \Theta_3^2} \frac{d}{d v'} \lg \vartheta_0(v', \tau') = \frac{1}{\pi j \vartheta_0 \vartheta_2}$$

$$\times\left[-\frac{2\pi i v}{1-\tau} - \frac{\pi(\vartheta_2^2 - i\vartheta_0^2)\vartheta_1 v \vartheta_2 v \vartheta_3 v}{\vartheta_0 v (\vartheta_3^2 v + i\vartheta_1^2 v)} + \frac{\vartheta_0' v}{\vartheta_0 v}\right], \text{ also}$$

$$E(u,k) = \frac{1}{j\vartheta_0\vartheta_2}\left[-\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} v + \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_0' v}{\vartheta^0 v} - \frac{(\vartheta_2^2 - i\vartheta_0^2)\vartheta_1 v \vartheta_2 v \vartheta_3 v}{\vartheta_0 v (\vartheta_3^2 v + i\vartheta_0^2 v)}\right.$$

$$\left. + \pi i v \vartheta_0^2 (\vartheta_2^2 + i\vartheta_0^2)\right].$$

Mithilfe von 26 ergibt sich schließlich

30. $$E(u,k) = \frac{1}{j\sqrt{k_1 k_1'}}$$

$$\times\left[E(u_1, k_1) - \frac{k_1 (k_1 - i k_1') \operatorname{sn}(u_1, k_1) \operatorname{cn}(u_1, k_1) \operatorname{dn}(u_1 k_1)}{1 - k_1 (k_1 - i k_1') \operatorname{sn}^2 (u_1, k_1)}\right.$$

$$\left. + i k_1' (k_1' + i k_1') u_1\right].$$

Schließlich wollen wir noch einige einfache Beziehungen ableiten, die uns später von Nutzen sein werden. Aus 20. folgt

31. $k k' = \frac{1}{4 k_1 k_1'}$, ferner

32. $1 - k^2 + k^4 = -\frac{1}{16 k_1^2 k_1'^2}(1 - 16 k_1^2 + 16 k_1^4)$.

---

[1]) Krause, Seite 45. [2]) Krause, Seite 24. [3]) Krause, Seite 28.

Ist $k^2 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$, so ergibt sich mithilfe von 23.

33. $$\frac{\alpha - \gamma}{\mathrm{sn}^2(u, k)} + \gamma = \frac{\alpha - \gamma}{4\, i\, k_1\, k_1'} \frac{\mathrm{cn}^2(u_1, k_1)}{\mathrm{sn}^2(u_1, k_1)\, \mathrm{dn}^2(u_1, k_1)} + \beta.$$

Ist $u_1 = K_1$, so ist $u = 2\, j \sqrt{k_1 k_1'}\, K_1$. Mithilfe von 19. u. 28.

34. folgt $(u)_{u_1 = K_1} = K + i K'$.

§ 4. Beweis einiger Ungleichungen.

Wir behandeln zunächst die Ungleichung

35. $2(1 - k^2 + k^4) E - k'^2 (2 - k^2) K > 0$ für $0 < k^2 < 1$.

Nach 9. und 10. ist

$$\frac{d}{d k^2} [2(1 - k^2 + k^4) E - k'^2 (2 - k^2) K]$$

$$= \tfrac{5}{2} [-(1 - 2k^2) E + k'^2 K] = \tfrac{5}{2} k^2 \int_0^K [1 + (1 - 2k^2) \mathrm{sn}^2 u]\, du > 0.$$

Nun ist

$2(1 - k^2 + k^4) E - k'^2 (2 - k^2) K \Big/_{k^2 = 0} = 0$, also ist

$2(1 - k^2 + k^4) E - k'^2 (2 - k^2) K > 0$.

Mithilfe der leicht zu beweisenden Gleichung

36. $$E(u) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [\zeta(v + \omega_2) + e_1 v - \eta_2] \quad (u = v \sqrt{e_1 - e_3})$$

ergibt sich

$$2(1 - k^2 + k^4) E - k'^2 (2 - k^2) K = \tfrac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}^5} (2 g_2 \eta_1 - 3 g_3 \omega_1),$$

also ein Zusammenhang mit der von Sachs[1]) behandelten Ungleichung $2 g_2 \eta_1 - 3 g_3 \omega_1 > 0$.

Wir beweisen ferner

37. $$e^{\frac{\pi i}{4}} [2(1 - k^2 + k^4) E(K + i K') - k'^2 (2 - k^2)(K + i K')] > 0$$ [2])

für $k^2 = \frac{1}{2} - a\, i$ $(a > 0)$.

[1]) Math. Zeitschrift, Bd. 27. [2]) $K + i K'$ Argument von $E(u)$.

Nach 30. und 34. ist

38. $E(K+iK')=\frac{1}{j\sqrt{k_1 k_1'}}[E_1+ik_1'(k_1+ik_1')K_1]$, wobei

$E_1=E(K_1, k_1)$. Nach 20., 32, 34. und 38. ist ferner

$$j[2(1-k^2+k^4)E(K+iK')-k'^2(2-k^2)(K+iK')]$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{k_1 k_1'^5}}[(-1+16k_1^2-16k_1^4)E_1+k_1'^2(1-8k_1^2)K_1]$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{k_1 k_1'^5}}\int_0^{K_1}[7-8k_1^2+(1-16k_1^2+16k_1^4)\mathrm{sn}^2(u_1,k_1)]\,du_1.$$

Nach 22. ist $0<k^2<\frac{1}{2}$, also der Integrand positiv, womit der Beweis erbracht ist. Mithilfe von 36. ergibt sich leicht

$$j[2(1-k^2+k^4)E(K+iK')-k'^2(2-k^2)(K+iK')]$$

$$=\frac{3j}{4\sqrt{e_1-e_3}^5}(2g_2\eta_2-3g_3\omega_2).$$

Wir beweisen weiter

39. $3E-(2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})K<0$ für $0<k^2<1$.

Mithilfe von 9. u. 10. ergibt sich, wenn wir $w=\sqrt{1-k^2+k^4}$ setzen

$$\frac{d}{dk^2}[3E-(2-k^2+w)K]=-\frac{1}{2k^2k'^2w}[(1-2k^2-w)wE$$

$$+k'^4(1+k^2-w)K]=-\frac{1}{2k'^2w}\int_0^K[k^2(2-k^2-w)+(-1$$

$+2k^2+w)w\,\mathrm{sn}^2u]\,du<0$, da der Integrand positiv ist. Ferner $3E-(2-k^2+w)K=0$ für $k^2=0$, womit 39. bewiesen ist.

Mithilfe von 36. ergibt sich hier

$$3E-(2-k^2+w)K=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\sqrt{3}\,\eta_1-\frac{\sqrt{g_2}\,\omega_1}{2}\right).$$

Wir beweisen schließlich

40. $e^{\frac{\pi i}{4}}[3E(K+iK')-(2-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4})(K+iK')]>0$

für $k^2 = \frac{1}{2} + a\,i$, wobei $|a| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nach 20., 30. und 34. ist

$$j[3\,E(K+iK') - (2-k^2+w)(K+iK')] = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_1'}}[6\,E_1$$

$$-(5-4k_1^2 \pm \sqrt{1-16k_1^2+16k_1^4})\,K_1] = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_1'}} \int_0^K [1$$

$$+4k_1^2 \pm \sqrt{1-16k_1^2+16k_1^4} - 6k_1^2\,sn^2(u_1, k_1)]\,du_1 > 0,$$

da nach Voraussetzung und nach 22. der Integrand sich als positiv erweist. Nach 36. ist $j\,[3\,E\,(K+iK')$

$$-(2-k^2+w)(K+iK)] = \frac{j\sqrt{3}}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\sqrt{3}\,\eta_2 \pm \frac{\sqrt{g_2}\,\omega_2}{2}\right)$$

§ 5. Elimination der Wurzel des beim elliptischen Integral auftretenden Polynoms.

Ist ein elliptisches Integral von der Form $\int F(x\sqrt{X})\,dx$ gegeben, wobei $X = x^3 - 3ax - 2b = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, so hat der Modul der zugehörigen Jacobischen Funktionen den Wert

$k = \sqrt{\frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}}$. Setzt man nun

42. $x_1 = 2\sqrt{a}\,\cos\frac{\omega}{3}$, $x_2 = -2\sqrt{a}\,\cos\left(60^0+\frac{\omega}{3}\right)$, $x_3 = -2\sqrt{a}$

$\times \cos\left(60^0-\frac{\omega}{3}\right)$, wobei $\cos\omega = \frac{b}{a\sqrt{a}}$, was stets möglich ist, falls man für ω auch komplexe Werte zuläßt, so wird

43. $k^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega}{3}}$, woraus sich ergibt

44. $\sin\frac{\omega}{3} = \frac{\sqrt{3}\,k^2}{2\sqrt{1-k^2+k^4}}$ und $\cos\frac{\omega}{3} = \frac{2-k^2}{2\sqrt{1-k^2-k^4}}$.

Hieraus folgt

45. $x_1 = \frac{\sqrt{a}\,(2-k^2)}{\sqrt{1-k^2+k^4}}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{a}\,(1-2k^2)}{\sqrt{1-k^2+k^4}}$,

$x_3 = \frac{-\sqrt{a}\,(1+k^2)}{\sqrt{1-k^2+k^4}}$. Aus 42. und 44. folgt

46. $\frac{dx_1}{d\omega} = \frac{-\sqrt{a}\,k^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-k^2+k^4}}$, $\frac{dx_2}{d\omega} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}\sqrt{1-k^2+k^4}}$;

$\frac{dx_3}{d\omega} = \frac{-\sqrt{a}\,k'^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-k^2+k^4}}$. Aus 43. und 44. folgt

47. $\frac{dk^2}{d\omega} = \frac{2(1-k^2+k^4)}{3\sqrt{3}}$.

---

2. Kapitel.

$$n = -4,\ \varepsilon = +1,\ 0 < \frac{a^4}{4} < h.$$

§ 1. Extremalen.

Nach 1a lautet die Differentialgleichung

$d\varphi = \frac{a\,dr}{\sqrt{h r^4 - a^2 r^2 + 1}}$. Wir setzen

$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{i a^2}{2\sqrt{4h - a^4}}$ und erhalten

$$d\varphi = \frac{j}{\sqrt[4]{h}} \sqrt{\frac{k'^2 - k^2}{k\,k'}} \frac{dr}{\sqrt{\left(r^2 - \frac{i\,k'}{k\sqrt{h}}\right)\left(r^2 + \frac{i\,k}{k'\sqrt{h}}\right)}} \text{ oder}$$

$$r = \frac{\sqrt{k\,k'}}{j\sqrt[4]{h}} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},\ \varphi = \sqrt{k'^2 - k^2}\,u + b_0.$$

Wir transformieren nach 22. und 23. und erhalten

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \frac{\operatorname{sn}(u_1, k_1) \operatorname{dn}(u_1, k_1)}{\operatorname{cn}(u_1, k_1)},\ \varphi = \sqrt{2}\,\sqrt{k_1^2 - k_1'^2}\,u_1 + b_0,$$

wobei $k_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{4h-a^4}{4h}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{4h-a^4}{4h}}}\right)$.

Wegen der Bedingung $r > 0$ ist u, auf das Intervall $0 < u_1 < K_1$ einzuschränken.

§ 2. Konjugierte Punkte.

Bei etwas geänderter Bezeichnungsweise sind die Extremalen gegeben durch

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = r(u, k^2, b_0),$$

$\varphi = \sqrt{2}\sqrt{k^2 - k'^2}\, u + b_0 = \varphi(u, k^2, b_0)$. Wir bilden

$$\Phi(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial k^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial r}{\partial u}} \frac{\partial r}{\partial k^2}$$ und erhalten mithilfe von 8.

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^2 - k'^2}\, k^2 k'^2}\left[(k^2 - k'^2)\left(E(u) - \frac{k^2 s c^3 d}{d^2 - k^2 s^2 c^2}\right) + k'^2 u\right].$$

Nach einfacher Rechnung ergibt sich

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \frac{s^4 d^4 + c^4}{(d^2 - k^2 s^2 c^2)^2} > 0.$$

Da $\Phi(u)$ im Intervall $0 < u < K$ endlich ist, gibt es keine konjugierten Punkte.

---

3. Kapitel.

$n = -3, \varepsilon = +1.$

§ 1. Extremalen.

Nach 1a lautet die Differentialgleichung

48. $$d\varphi = \frac{a\, dr}{\sqrt{h r^4 - a^2 r^2 + r}}.$$

Nach elementarer Rechnung ergibt sich

49. $r = \dfrac{1}{a^2\left[\dfrac{x_1 - x_3}{\operatorname{sn}^2 u} + x_3 + \frac{1}{3}\right]}$, $\varphi = \dfrac{2u}{\sqrt{x_1 - x_3}} + b_0$, wobei

50. $x_1 = \frac{2}{3}\cos\dfrac{\omega}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}\cos\left(60^0 + \dfrac{\omega}{3}\right)$, $x_3 = -\frac{2}{3}\cos\left(60^0 - \dfrac{\omega}{3}\right)$,

51. $\cos\omega = 1 - \dfrac{27\,h}{2\,a^2}$ und

$$k^2 = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}.$$

52. I. $0 < h < \dfrac{4\,a^6}{27}$

In diesem Fall ist $-1 < \cos\omega < +1$, also $0 < \omega < \pi$, daher

53. $x_1 > x_2 > x_3$ und nach 43.

$0 < k^2 < 1$. Damit φ mit u wächst, setzen wir

54. $\sqrt{x_1 - x_3} > 0$.

Nach 49. und 50. ist r und φ reell und $r > 0$. Die Extremale ist eine geschlossene, einseitig gekrümmte Kurve durch den Nullpunkt.

55. II. $h > \dfrac{4\,a^6}{27}$. Hier ist $\cos\omega < -1$. Setzt man

56. $\omega = -\pi + i\,\omega_1$ $(\omega_1 > 0)$, so wird nach 50.

57. $x_1 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{Kof}\dfrac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\dfrac{\omega_1}{3}\right)$, $x_2 = -\frac{2}{3}\,\mathfrak{Kof}\dfrac{\omega_1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{Kof}\dfrac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\dfrac{\omega_1}{3}\right)$. Nach 22., 23. u. 49. ergibt sich

58. $r = \dfrac{1}{a^2\left[\dfrac{x_1 - x_3}{4\,i\,k_1\,k_1'}\,\dfrac{\operatorname{cn}^2(u_1, k_1)}{\operatorname{sn}^2(u_1, k_1)\,\operatorname{dn}^2(u_1, k_1)} + x_2 + \frac{1}{3}\right]}$,

$$\varphi = \frac{4\,j\sqrt{k_1\,k_1'}\,u_1}{\sqrt{x_1 - x_3}} + b_0 \text{ und}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Ktg}^2\dfrac{\omega_1}{3}}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Ktg}^2\dfrac{\omega_1}{3}}}}\right.$$

Es gibt zwei Werte $\bar{u}_1$ und $\bar{\bar{u}}_1$, für die der Nenner von r in 58. Null ist und für die gilt $\bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1 = 2\,K_1$. Wegen $r > 0$ ist u_1 auf die Intervalle $0 \leqq u_1 \leqq \bar{u}_1$ und $\bar{\bar{u}}_1 \leqq u_1 \leqq 2\,K_1$ zu beschränken.

a) $0 \leqq u_1 \leqq \bar{u}_1$.

Setzen wir $\varphi = b$ für $u_1 = 0$, so gelten die Gleichungen 58., wobei nur zu setzen ist

59. $b_0 = b$. Damit φ mit u_1 wächst, setzen wir

60. $\sqrt{x_1 - x_3} = j\ (> 0)$.

Die Extremale hat spiralenähnliche Gestalt.

b) $\bar{\bar{u}}_1 \leqq u_1 \leqq 2\,K_1$.

Es sei $\varphi = b$ für $u_1 = 2\,K_1$. Dann gelten die Gleichungen 58.,

61. wobei $b_0 = -\dfrac{8\,j\,\sqrt{k_1\,k_1'}\,K_1}{\sqrt{x_1 - x_3}} + b$.

Die Extremale entsteht durch Spiegelung der im Fall IIa auftretenden Kurve an der Geraden $\varphi = b$.

62. III. $h < 0$.

In diesem Fall ist $\cos\omega > 1$. Wir setzen

63. $\omega = 2\,\pi - i\,\omega_1\ (\omega_1 > 0)$ und erhalten nach 50.

64. $x_1 = \frac{1}{3}\left(-\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\omega_1}{3}\right)$, $x_2 = \frac{2}{3}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega_1}{3}$,

$x_3 = \frac{1}{3}\left(-\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\omega_1}{3}\right)$, also

65. $k^2 = \frac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\dfrac{\omega_1}{3}$.

Auch hier gelten die Gleichungen 58., dagegen ist

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Ctg}^2\,\frac{\omega_1}{3}}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Ctg}^2\,\frac{\omega_1}{3}}}}\right).$$

Setzen wir $\varphi = b$ für $u_1 = 0$, so wird

66. $b_0 = b$. Ferner ist

67. $\sqrt{x_1 - x_3} = j\ (> 0)$.

Die Extremale hat hyperbelähnliche Gestalt. Sie wendet dem Nullpunkt die konkave Seite zu.

§ 2. Konjugierte Punkte.

I. Wir gehen aus von den hier gültigen Gleichungen 49., bilden

$$\Phi(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial r}{\partial u}} \frac{\partial r}{\partial \omega} \quad \text{und erhalten}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_3}} \left[-\frac{x_1' - x_3'}{x_1 - x_3} u - \frac{2}{c\,d} \frac{\partial s}{\partial \omega} + \frac{x_1' - x_3'}{x_1 - x_3} \frac{s}{c\,d} + \frac{x_3'}{x_1 - x_3} \frac{s^3}{c\,d} + \frac{2\,a'}{a} \left(\frac{s}{c\,d} + \frac{3\,x_3 + 1}{3\,(x_1 - x_3)} \frac{s^3}{c\,d} \right) \right].$$ [1]

Nach 44. und 50. ist

68. $x_1 = \frac{2 - k^2}{3\,w}$, $x_2 = -\frac{1 - 2\,k^2}{3\,w}$, $x_3 = -\frac{1 + k^2}{3\,w}$, ferner

$$x_1' = -\frac{k^2}{3\sqrt{3}\,w}, \quad x_2' = \frac{1}{3\sqrt{3}\,w}, \quad x_3' = -\frac{k'^2}{3\sqrt{3}\,w}.$$

Ferner folgt aus 44. und 51.

69. $$\frac{2\,a'}{a} = \frac{\sqrt{3}\,k^2 k'^2}{(2 - k^2)(1 - 2\,k^2)(1 + k^2) - 2\,w^3}.$$

Berücksichtigt man noch 8. und 47., so ergibt sich nach elementarer Rechnung

70. $$\Phi(u) = \frac{2\,a'}{9\,k^4 k'^4 a \sqrt{x_1 - x_3}} \Big\{ [(2 - k^2)(1 - 2\,k^2)(1 + k^2) - 2\,w^3]$$
$$[2\,(1 - k^2 + k^4)\,E(u) - k'^2\,(2 - k^2)\,u] - 2\,k^2\,(1 - k^2 + k^4)$$
$$\times [1 - 4\,k^2 + k^4 - (1 + k^2)\,w] \frac{sn\,u}{cn\,u\,dn\,u} - k^2\,w\,[2 - 5\,k^2 + 10\,k^4$$
$$- 5\,k^6 + 2\,k^8 - 2\,(1 + k\,)(1 - 3\,k^2 + k^4)\,w] \frac{sn^3\,u}{cn\,u\,dn\,u} \Big\}.$$

[1] Strich bedeutet die Ableitung nach ω.

Nach weiterer elementarer Rechnung ergibt sich

71. $$\frac{d\,\Phi(u)}{du} = -\frac{4\,a^4\,(x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3)\,r\,(h\,r^3 + 1)}{9\,\sqrt{3}\,h\,\sqrt{x_1 - x_3}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2}.$$

Nach 52, 53. und 54. ist $\frac{d\,\Phi(u)}{du} < 0$.

Es ist $\Phi(0) = 0$, ferner unter Benutzung von 69.

$$\Phi(2K) = \frac{2}{3\sqrt{3}\,k^2 k'^2\sqrt{x_1 - x_3}}\,[2(1 - k^2 + k^4)E - k'^2(2 - k^2)K],$$

also nach 35. und 54. $\Phi(2K) > 0$. Schließlich ist

$$\Phi(K \pm 0) = -\frac{2\,a'\,\omega}{9\,k'^4\,a\sqrt{x_1 - x_3}}(2 - k^2 + w)^2\,\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty.$$

Im übrigen ist $\Phi(u)$ endlich. Es gibt also keine konjugierten Punkte.

II. a) Wir gehen aus von den Gleichungen 58. und bilden

$$\Psi(u_1) = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} - \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}{\frac{\partial r}{\partial u_1}}\,\frac{\partial r}{\partial\omega_1}.$$ Mithilfe von 56. ergibt sich leicht $\Psi(u_1) = i\,\Phi(u)$, wobei $\Phi(u)$ durch 70. gegeben ist. Weiter ist

$\frac{d\,\Psi(u_1)}{du_1} = 2\,j^3\sqrt{k_1 k_1'}\,\frac{d\,\Phi(u)}{du}$, wobei $\frac{d\,\Phi(u)}{du}$ durch 71. gegeben ist. Nach 55., 57. und 60. ist $\frac{d\,\Psi(u_1)}{du_1} < 0$. Nach 23. und 30. ist $\Psi(u_1)$ im Intervall $0 < u_1 < \ddot{u}_1$ endlich. Es gibt also keine konjugierten Punkte.

b) Hier ergibt sich mit Rücksicht auf 61.

$$\Psi(u_1) = i\,\Phi(u) - \frac{d}{d\,\omega_1}\,\frac{8\,j\sqrt{k_1 k_1'}\,K_1}{\sqrt{x_1 - x_3}}.$$

Durch ähnliche Überlegungen wie in II a weist man das Nichtvorhandensein konjugierter Punkte nach.

III. Wir gehen wieder aus von den Gleichungen 58. und erhalten nach 63. und 66.

$\Psi(u_1) = -i\,\Phi(u)$, wobei $\Phi(u)$ durch 70. gegeben ist. Weiter ergibt sich

$\frac{d\Psi(u_1)}{du_1} = -2j^3\sqrt{k_1 k_1'}\,\frac{d\Phi(u)}{du}$, wobei $\frac{d\Phi(u)}{du}$ durch 71. gegeben ist. Nach 48., 62., 64. und 67. ist $\frac{d\Psi(u_1)}{du_1} < 0$.

Nach 23. und 30. ist $\Psi(0) = 0$. Nach 11. und 14. ist

72. $E[2(K + iK')] = 2E(K + iK')$. Mit Rücksicht auf 34. folgt

$$\Psi(2K_1) = -\frac{4i}{3\sqrt{3}\,k^2 k'^2\sqrt{x_1 - x_3}}$$
$$\times [2(1 - k^2 + k^4)E(K + iK') - k'^2(2 - k^2)(K + iK')].$$

Nach 37., 65. und 67. ist $\Psi(2K_1) < 0$. Schließlich ist

$$\Psi(K_1 \pm 0) = -\frac{2\frac{da}{d\omega_1}w}{9k^2 k'^2 a\sqrt{x_1 - x_3}}(1 - 2k^2 - w)^2$$
$$\times \frac{1}{k^2}\left(\frac{s}{c\,d}\right)_{u_1 = K_1 \pm 0}.$$

Unter Benutzung von 51., 63., 64., 67. und 68. folgt

$\Psi(K_1 \pm 0) = \frac{>0}{\pm 0} = \pm\infty$. Im übrigen ist $\Psi(u_1)$ endlich. Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

---

4. Kapitel.

$n = 4$.

§ 1. Extremalen.

A. $\varepsilon = +1$.

Nach 1a lautet die Differentialgleichung

73. $d\varphi = \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^6 + h\,r^2 - a^2}}$. Wir setzen $r^2 = x$ und erhalten

74. $d\varphi = \frac{a\,dx}{2x\sqrt{x^3 + h\,x - a^2}} = \frac{a\,dx}{2x\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}$,

75. wobei $x_1 = 2\sqrt{-\frac{h}{3}}\cos\frac{\omega}{3}$, $x_2 = -2\sqrt{-\frac{h}{3}}\cos\left(60^0+\frac{\omega}{3}\right)$,

$x_3 = -2\sqrt{-\frac{h}{3}}\cos\left(60^0-\frac{\omega}{3}\right)$ und

76. $\cos\omega = -\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2\,h\sqrt{-h}}$. Wir führen den Parameter u durch die Gleichung ein: $x = \frac{x_1-x_3}{sn^2\,u} + x_3$, wobei $k^2 = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$.

77. Dann ist $d\varphi = \frac{a\,du}{x\sqrt{x_1-x_3}}$ oder

78. $d\varphi = \frac{a\,sn^2\,u\,du}{\sqrt{x_1-x_3}\,(x_1-x_3+x_3\,sn^2\,u)}$.

Schließlich bestimmen wir ein Argument α durch die Gleichung $\frac{x_3}{x_1-x_3} = -k^2\,sn^2\,\alpha$. Dann ist

79. $sn^2\,\alpha = -\frac{x_3}{x_2-x_3}$, $cn^2\,\alpha = \frac{x_2}{x_2-x_3}$, $dn^2\,\alpha = \frac{x_1}{x_1-x_3}$

und bei passender Wahl des Vorzeichens von α

80. $k^2\,sn\,\alpha\,cn\,\alpha\,dn\,\alpha = -\frac{i\,a}{\sqrt{x_1-x_3}^3}$, wobei das Vorzeichen von $\sqrt{x_1-x_3}$ mit dem in 77. übereinstimmen soll. Dann geht 78. über in

81. $d\varphi = \frac{i\,k^2\,sn\,\alpha\,cn\,\alpha\,dn\,\alpha\,sn^2\,u\,du}{1-k^2\,sn^2\,\alpha\,sn^2\,u}$, also schließlich

82. $r = \sqrt{\frac{x_1-x_3}{sn^2\,u}+x_3}$, $\varphi = i\,\Pi\,(u,\alpha) + b_0$.

83. I. $h < -3\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Nach 43., 75. und 76. ergibt sich

84. $x_1 > 0 > x_2 > x_3$ und

$0 < k_2 < \frac{1}{2}$.

Setzen wir $\varphi = b$ für $u = 0$, so ergibt sich nach 83.

85. $r = \sqrt{\frac{x_1-x_3}{sn^2\,u}+x_3}$, $\varphi = i\,\Pi\,(u,\alpha) + b$.

Damit φ mit u wächst, ist nach 77. zu setzen

86. $\sqrt{x_1 - x_3} > 0$. Aus 79., 80., 84., 86. und den Gleichungen

87. $\operatorname{sn}(i\,u, k') = i\,\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$, $\operatorname{cn}(i\,u, k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u,k)}$, $\operatorname{dn}(i\,u, k') = \frac{\operatorname{dn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$ [1] folgt $\alpha = \pm K + i\,\beta$, wobei $0 < \beta < K'$.

Mithilfe der Gleichung $\Theta(u \pm K) = \Theta_1(u)$ folgt schließlich

88. $r = \sqrt{\frac{x_1 - x_3}{\operatorname{su}^2 u} + x_3}$, $\varphi = \frac{i}{2}\left[\lg \frac{\Theta_1(u - i\beta)}{\Theta_1(u + i\beta)} + 2\,u\,Z_2(i\beta)\right] + b$.

Es ist ersichtlich r und φ für reelles u reell. Die Bahnkurve hat ungefähr die Gestalt eines Hyperbelbogens, der dem Zentrum die konkave Seite zuwendet.

89. II. $-3\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < h < 0$. Nach 76. ist $\cos\omega > 1$. Setzen wir

90. $\omega = 2\pi - i\,\omega_1$ $(\omega_1 > 0)$, so wird nach 75.

91. $x_1 = \sqrt{-\frac{h}{3}}\left(-\operatorname{Cof}\frac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $x_2 = 2\sqrt{-\frac{h}{3}}\operatorname{Cof}\frac{\omega_1}{3}$,

$x_3 = \sqrt{-\frac{h}{3}}\left(-\operatorname{Cof}\frac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$, ferner

92. $k^2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Ctg}\frac{\omega_1}{3}$. Nach 25., 33. und 82. folgt

$$r = \sqrt{\frac{x_1 - x_3}{4\,i\,k_1 k_1'}\,\frac{\operatorname{cn}^2(u_1, k_1)}{\operatorname{sn}^2(u_1, k_1)\operatorname{dn}^2(u_1, k_1)}} + x_2,$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\left[\lg \frac{H(u_1 - \gamma, k_1)\,\Theta_1(u_1 - \gamma, k_1)}{H(u_1 + \gamma, k_1)\,\Theta_1(u_1 + \gamma, k_1)} + 2\,u_1\,[Z_1(\gamma, k_1) + Z_2(\gamma, k_1)]\right] - \frac{\pi}{2} + b_0,$$

wobei $u = 2\,j\sqrt{k_1 k_1}\,u_1$,

$\alpha = 2\,j\sqrt{k_1 k_1}\,\gamma + i\,K'$ und nach 22. und 66.

$$k_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\operatorname{Ctg}^2\frac{\omega_1}{3}}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 3\operatorname{Ctg}^2\frac{\omega_1}{3}}}}\right).$$

Setzen wir $\varphi = b + \frac{\pi}{2}$ für $u_1 = 0$, so ergibt sich

[1] Krause, Seite 58.

93. $b_0 = b + \frac{\pi}{2}$.

Damit φ mit u wächst, ist nach 80. und 91. zu setzen

94. $\sqrt{x_1 - x_3} = j\ (> 0)$. Dann folgt aus 11., 23., 80. und 87. $\gamma = i\,\delta$, wobei $0 < \delta < K_1'$, und wir erhalten schließlich

95.
$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{x_1 - x_3}{4\,i\,k_1\,k_1'}\,\frac{cn^2(u_1, k_1)}{sn^2(u_1, k_1)\,dn^2(u_1, k_1)} + x_2}, \\ \varphi = \frac{i}{2}\left[\lg\frac{H(u_1 - i\,\delta, k_1)\,\Theta_1(u_1 - i\,\delta, k_1)}{H(u_1 + i\,\delta, k_1)\,\Theta_1(u_1 + i\,\delta, k_1)}\right. \\ \left. + 2\,u_1\,(Z_1(i\,\delta, k_1) + Z_2(i\,\delta, k_1))\right] + b. \end{cases}$$

Über die Bahnkurve ist ähnliches zu sagen wie in Fall I.

96. III. $h > 0$. In diesem Fall ist nach 76. $\cos\omega = i\ (> 0)$.

97. Wir setzen $\omega = \frac{\pi}{2} - i\,\omega_1\ (\omega_1 > 0)$ und erhalten

98. $x_1 = \sqrt{\frac{h}{3}}\left(-\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\ \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $x_2 = 2\sqrt{\frac{h}{3}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3}$,

$x_3 = \sqrt{\frac{h}{3}}\left(-\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\ \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3}\right)$, ferner

99. $k^2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathfrak{Tg}\frac{\omega_1}{3}$.

Wie in Fall II gelten die Gleichungen 94. u. 95., wobei hier aber

$$k_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Tg}^2\frac{\omega_1}{3}}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\mathfrak{Tg}^2\frac{\omega_1}{3}}}}\right).$$

B. $\varepsilon = -1$.

Nach 1a lautet die Differentialgleichung

100. $d\varphi = \frac{a\,d\,r}{r\sqrt{-r^6 + h\,r^2 - a^2}}$. Setzen wir $r^2 = -x$, so wird

101. $d\varphi = \frac{a\,d\,x}{2\,x\sqrt{x^3 - h\,x - a^2}}$. Diese Gleichung stimmt vollkommen mit 74 überein (es ist nur h durch $-h$ zu ersetzen), wir erhalten daher sofort entsprechend 82.

102. $r = \sqrt{-\left(\frac{x_1 - x_3}{\operatorname{sn}^2 u} + x_3\right)}$, $\varphi = i\,\Pi(u, \alpha) + b_0$, wobei

103. $x_1 = 2\sqrt{\frac{h}{3}}\cos\frac{\omega}{3}$, $x_2 = -2\sqrt{\frac{h}{3}}\cos\left(60^0 + \frac{\omega}{3}\right)$,

$x_3 = -2\sqrt{\frac{h}{3}}\cos\left(60^0 - \frac{\omega}{3}\right)$.

Man entscheidet leicht, daß nur der dem Fall A I entsprechende in Frage kommt. Wir erhalten daher für h die Bedingung

104. $h > 3\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Dann ist wie dort $0 < \cos\omega < 1$, also

$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, ferner

105. $x_1 > 0 > x_2 > x_3$ und

106. $0 < k^2 < \frac{1}{2}$.

Setzen wir in 103. mithilfe von 11. und 17. $u = v + i\,K'$, ferner $\varphi = b$ für $v = 0$, so ergibt sich

107. $b_0 = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi\,\alpha}{K} + 2\,K'\,Z(\alpha)\right) + b$.

Damit φ mit v wächst, ist nach 77. zu setzen, da $x < 0$

108. $\sqrt{x_1 - x_3} < 0$. Ähnlich wie in Fall A I ergibt sich $\alpha = \pm K - i\beta$ und wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichung $H(u \pm K) = \pm H_1(u)$

109. $r = \sqrt{-[(x_2 - x_3)\operatorname{sn}^2 v + x_3]}$,

$\varphi = \frac{i}{2}\left[\lg\frac{H_1(v + i\beta)}{H_1(v - i\beta)} - 2\,v\,Z_2(i\beta)\right] + b$

r und φ sind reell für reelles v. Die Bahnkurve ist eine Wellenlinie, die zwischen den beiden Kreisen $r = \sqrt{-x_2}$ und $r = \sqrt{-x_3}$ hin und her läuft.

§ 2. Konjugierte Punkte.

A I. Wir gehen aus von den Gleichungen 85. und bilden

$$\Phi(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial r}{\partial u}} \frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial \omega}.$$ Es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)_{\alpha = \text{konst}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{d \alpha}{d \omega} \cdot \frac{d \alpha}{d k^2}$$ berechnet sich aus der Gleichung $\frac{d s_1^2}{d k^2} = \left(\frac{\partial s_1^2}{\partial k^2}\right)_{\alpha = \text{konst}} + \frac{\partial s_1^2}{\partial \alpha} \frac{d \alpha}{d k^2}$.

Unter Benutzung der Gleichungen 7., 8. und 47. folgt nach einiger Rechnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{i (1 - k^2 + k^4)}{3 \sqrt{3}} \left[E(u) \left(\frac{s_1 c_1}{k'^2 d_1} - \frac{1}{s_1 c_1 d_1} \frac{d s_1^2}{d k^2} \right) + u \frac{d_1}{s_1 c_1} \frac{d s_1^2}{d k^2} - \frac{s_1 c_1 d_1 s^2 E(u)}{k'^2 N} + \frac{s_1 c_1 d_1 s^2 u}{N} - \frac{s c d}{N} \left(\frac{s_1 c_1 d_1}{k'^2} + \frac{k^2 s_1^3 c_1}{k'^2 d_1} - \frac{k^2 s_1}{c_1 d_1} \frac{d s_1^2}{d k^2} \right) \right].$$

Es ist weiter

110. $x = \frac{x_1 - x_3}{s^2} + x_3$, also

111. $\frac{\partial x}{\partial u} = - \frac{2 (x_1 - x_3) c d}{s^3}$. Nach 44. und 75. ist

112. $x_1 = \sqrt{\frac{-h}{3}} \frac{2 - k^2}{w}$, $x_2 = - \sqrt{\frac{-h}{3}} \frac{1 - 2 k^2}{w}$,

$x_3 = - \sqrt{-\frac{h}{3}} \frac{1 + k^2}{w}$, ferner

$x_1' = - \frac{\sqrt{-h}\, k^2}{3 w}$, $x_2' = \frac{\sqrt{-h}}{3 w}$, $x_3' = - \frac{\sqrt{-h}\, k'^2}{3 w}$.

Unter Benutzung von 8., 47., 81. und 112. ergibt sich

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial \omega} = - \frac{i k^2 s_1 c_1 d_1 s^2}{6 \sqrt{3}\, N} \left[(1 - 2 k^2) \frac{s}{c d} - \frac{k'^2 s^3}{c d} \right.$$

$$+ 2(1 - k^2 + k^4)\left(\frac{E(u)}{k^2 k'^2} - \frac{u}{k^2} - \frac{s\,c}{k'^2 d}\right)\Big] \text{ und}$$

113. $$\Phi(u) = \frac{i}{6\sqrt{3}}\left\{2(1 - k^2 + k^4)\left[E(u)\left(\frac{s_1 c_1}{k'^2 d_1} - \frac{1}{s_1 c_1 d_1}\frac{d s_1^2}{d k^2}\right.\right.\right.$$
$$+ \frac{d_1 u}{s_1 c_1}\frac{d s_1^2}{d k^2} - \frac{s c d}{N}\left(\frac{k^2 s_1^3 c_1}{k'^2 d_1} - \frac{k^2 s_1}{c_1 d_1}\frac{d s_1^2}{d k^2} + \frac{s_1 c_1 d_1}{k'^2}\right)$$
$$\left.\left.\left. - \frac{k^2 s_1 c_1 d_1 s^3 c}{k'^2 d N}\right] + \frac{k^2(1 - 2k^2) s_1 c_1 d_1 s^3}{c d N} - \frac{k^2 k'^2 s_1 c_1 d_1 s}{c d N}\right.\right.$$

Nach 79., 80. und 112. erhalten wir schließlich

114. $$\Phi(u) = -\frac{\sqrt{x_1 - x_3}^3}{54\sqrt{3}\, k^2 k'^2 a}\left\{2(1 - k^2 + k^4)\,[2(1 - k^2\right.$$
$$+ k^4)\,E(u) - k'^2(2 - k^2)\,u] + k^2(1 + k^2)\left[-2(1 - k^2\right.$$
$$\left.\left. + k^4)\,\frac{sn\,u}{cn\,u\,dn\,u} + (2 - k^2 - k^4 + 2k^6)\,\frac{sn^3 u}{cn\,u\,dn\,u}\right]\right\}.$$

Wir diskutieren den Verlauf von $\Phi(u)$. Wegen der Singularität an der Stelle $u = 2nK$ beschränkt sich die Betrachtung auf das Intervall $0 \leqq u \leqq 2K$. Nach elementarer Rechnung ergibt sich

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = -\frac{1}{54\sqrt{3}\, a c^2 d^2}$$
$$\times \sqrt{x_1 - x_3}^3 k^2 k'^2 s^2 [9 - 6(1 + k^2) s^2 - (2 - 5k^2 + 2k^4) s^4]$$

oder nach 110., 111. und 112.

115. $$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\sqrt{x_1 - x_3}^3 (1 - k^2 + k^4)(r^4 + h)}{18\sqrt{3}\, h a r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2}$$

Nach 73., 83., 84. und 86. ist $\frac{d\Phi(u)}{du} < 0$.

Es ist $\Phi(0) = 0$, ferner nach 35. u. 86. $\Phi(2K) < 0$. Weiter ist

$$\Phi(K \pm 0) = -\frac{k^2(1 + k^2)(1 - 2k^2)}{54\sqrt{3}\, a k'^2}\,\frac{1}{\mp 0} = \pm\infty.$$

Im übrigen ist $\Phi(u)$ endlich. Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

II. Wir gehen aus von den Gleichungen 95. und bilden

$$\Psi(u_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}}{\frac{\partial r}{\partial u_1}} \frac{\partial r}{\partial \omega_1}.$$ Nach 82., 90. u. 93. ergibt sich

$\Psi(u_1) = -i\,\Phi(u)$, wobei $\Phi(u)$ durch 114. gegeben ist. Weiter ergibt sich

$\frac{d\,\Psi(u_1)}{du_1} = -2\,j^3 \sqrt{k_1 k_1'}\,\frac{d\,\Phi(u)}{du}$, wobei $\frac{d\,\Phi(u)}{du}$ durch 115. gegeben ist.

Nach 73., 89., 91., 92. und 94. ist $\frac{d\,\Psi(u_1)}{du_1} > 0$.

Nach 23. und 30. ist $\Psi(0) = 0$, ferner nach 34. und 72.

$$\Psi(2K_1) = \frac{4\,i\sqrt{x_1 - x_3}^3 (1 - k^2 + k^4)}{27\sqrt{3}\,a\,k^2 k'^2}$$

$$\times [2(1 - k^2 + k^4)\,E(K + iK')^{1}) - k'^2(2 - k^2)\,K + iK')].$$

Nach 37., 92. und 94. ist $\Psi(2K_1) > 0$.

Nach 23., 30., 34. und 112. ist

$$\Psi(K_1 \pm 0) = \frac{4\,j\sqrt{k_1^3 k_1'^5}\,(1 - k^2 + k^4)\sqrt{x_1 - x_3}^3\,x_1 x_3}{9\sqrt{3}\,a\,h}\,\frac{1}{\pm 0}.$$

Nach 89., 91., 92. und 94. ist $\Psi(K_1 \pm 0) = +\infty$. Im übrigen ist $\Psi(u_1)$ endlich. Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

III. Durch ganz entsprechende Rechnung wie in Fall II ergibt sich

$$\frac{d\,\Psi(u_1)}{du_1} > 0,\ \Psi(0) = 0,\ \Psi(2K_1) < 0,\ \Psi(K \pm 0) = \mp\infty.$$

Es gibt danach in diesem Fall keine konjugierten Punkte.

---

[1]) $K + iK'$ Argument von $E(u)$.

B. Wir gehen aus von den Gleichungen 109. und bilden

$$\Psi(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\frac{\partial r}{\partial v}} \frac{\partial r}{\partial \omega}.$$ Nach 82. und 107. ist

$\Psi(v) = \Phi(u) + A$, wobei $\Phi(u)$ durch 114. gegeben ist und $A = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{\pi\alpha}{K} + 2K'Z(\alpha)\right]$. Weiter ist

$\frac{d\Psi(v)}{dv} = \frac{d\Phi(u)}{du}$, wobei $\frac{d\Phi(u)}{du}$ durch 114. gegeben ist und wobei nur nach § 1, B h durch $-h$ zu ersetzen ist.

Nach 100., 104., 105. und 108. ist $\frac{d\Psi(v)}{dv} < 0$.

Nach 11. und 14. ist

$$\Psi(2nK \pm 0) = -\frac{\sqrt{x_1 - x_3}^3 k'^2 (1 - 2k^2)(2 - k^2)}{54\sqrt{3}\, a k^2} \frac{1}{\pm 0}$$

und $$\Psi[(2n+1)K \pm 0] = -\frac{\sqrt{x_1 - x_3}^3 (1 + k^2)(2 - k^2)}{54\sqrt{3}\, a k^2 k'^2} \frac{1}{\pm 0}.$$

Nach 106. und 108. ist $\Psi(2nK \pm 0) = \Psi[(2n+1)K \pm 0] = \pm\infty$. Im übrigen ist $\Psi(v)$ endlich. Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

---

5. Kapitel.

n = 1.

§ 1. Extremalen.

Nach 1 a lautet die Differentialgleichung

116. $$d\varphi = \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^3 + hr^2 - a^2}} = \frac{a\,dr}{r\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)}}.$$

Unter Benutzung der Gleichung 74. folgt, daß auch hier die Gleichungen 82. gelten. Es fällt nur bei r die Wurzel weg und zu φ tritt der Faktor 2. Ferner tritt an die Stelle von x_1, x_2, x_3

117. $r_1 = -\frac{h}{3}\left(1 - 2\cos\frac{\omega}{3}\right)$, $r_2 = -\frac{h}{3}\left[1 + 2\cos\left(60^0 + \frac{\omega}{3}\right)\right]$,

$r_3 = -\frac{h}{3}\left[1 + 2\cos\left(60^0 - \frac{\omega}{3}\right)\right]$, wobei

118. $\cos\omega = \frac{27\,a^2}{2\,h^3} - 1.$

119. I. $h > 3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Dieser Fall entspricht dem Fall I in Kapitel 4. Es ist hier nur

120. $0 < k^2 < 1.$

121. II. $0 < h < 3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Dieser Fall entspricht dem Fall II in Kapitel 4. Abweichend ist nur

122. $r_1 = \frac{h}{3}\left(-1 - \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $r_2 = \frac{h}{3}\left(-1 + 2\,\mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $r_3 = \frac{h}{3}\left(-1 - \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$

123. III. $h < 0$. Hier ist $\cos\omega < -1$. Wir setzen

124. $\omega = -\pi - i\,\omega_1$ und erhalten nach 117.

125. $r_1 = \frac{h}{3}\left(-1 + \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3} - i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $r_2 = \frac{h}{3}\left(-1 - 2\,\mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3}\right)$, $r_3 = \frac{h}{3}\left(-1 + \mathfrak{Kof}\frac{\omega_1}{3} + i\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega_1}{3}\right)$.

Im übrigen siehe Fall II.

B. $\varepsilon = -1$. Dieser Fall entspricht dem Fall B in Kapitel 4.

§ 2. Konjugierte Punkte.

A I. Es ist leicht einzusehen, daß die Größe $\Phi(u)$, abgesehen von einem Faktor 2, durch 113. gegeben ist. Nach 44. und 117. ist

126. $r_1 = -\frac{h}{3}\left(1 - \frac{2 - k^2}{w}\right)$, $r_2 = -\frac{h}{3}\left(1 + \frac{1 - 2\,k^2}{w}\right)$,

$r_3 = -\frac{h}{3}\left(1 + \frac{1 + k^2}{w}\right)$.

Mithilfe dieser Werte ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$127.\quad \Phi(u) = -\frac{\sqrt{r_1 - r_3}^{\,3}}{81\sqrt{3}\,a\,k^2 k'^2}\Big\{w\,[(2-k^2)(1-2k^2)(1+k^2) + 2w^3]\,[3E(u) - (2-k^2+w)u] + 3k^2(1+k^2+w)\Big[[-2(1-k^2+k^4)+(1+k^2)w]\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} + [(2-3k^2+2k^4)(1+k^2) - (1+k^4)w]\frac{\operatorname{sn}^3 u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}\Big]\Big\}.$$

Weiter ergibt sich

$$128.\quad \frac{d\Phi(u)}{du} = -\frac{4k^2k'^2(1-k^2+k^4)\sqrt{r_1-r_3}^{\,7}\,r(r+h)}{3\sqrt{3}\,a\,h^2\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2}.$$

Nach 119. ist $\frac{d\Phi(u)}{du} < 0$.

Es ist $\Phi(0) = 0$, ferner mit Rücksicht auf 126.

$$129.\quad \Phi(2K) = -\frac{2(1-k^2+k^4)^2\sqrt{r_1-r_3}^{\,3}\,r_1 r_2 r_3}{3\sqrt{3}\,a\,h^2 k^2 k'^2}[3E - (2-k^2 + w)K].$$

Nach 39., 117. und 119. ist $\Phi(2K) > 0$.

Schließlich ist

$$\Phi(K \pm 0) = -\frac{k^2(1-k^2+k^4)\sqrt{r_1-r_3}^{\,3}\,r_2 r_3}{3\sqrt{3}\,a\,h^2 k'^2}\frac{1}{\pm 0} = \frac{>0}{\pm 0} = \pm\infty.$$

Damit ist das Nichtvorhandensein konjugierter Punkte bewiesen.

II. Es ergibt sich leicht

$\Psi(u_1) = -i\,\Phi(u)$, wobei $\Phi(u)$ durch 127. gegeben ist. Weiter ergibt sich

$$\frac{d\Psi(u_1)}{du_1} = -2j^3\sqrt{k_1 k_1'}\,\frac{d\Phi(u)}{du},$$ wobei $\frac{d\Phi(u)}{du}$ durch 128. gegeben ist. Nach 92., 94. und 121 ist $\frac{d\Psi(u_1)}{du_1} > 0$.

Es ist $\Psi(0) = 0$, ferner mit Rücksicht auf 14., 23., 30., 34. u. 72.

$$\Psi(2K_1) = \frac{2i(1-k^2+k^4)^2\sqrt{r_1-r_3}^3 r_1 r_2 r_3}{3\sqrt{3}\,a\,h^3 k^2 k'^2}$$

$$\times [3E(K+iK') - (2-k^2+w)(K+iK')].$$

Nach 40., 92., 94., 121. und 122. ist $\Psi(2K_1) < 0$.

Nach 23., 30. und 126. ist schließlich

$$\Psi(K_1 \pm 0) = -\frac{i(1-k^2+k^4) r_1 r_3 \sqrt{r_1-r_3}^3}{3\sqrt{3}\,a\,h^2} \frac{1}{k^2}\left(\frac{s}{c\,d}\right)_{u_1 = K_1 \pm 0}.$$

Nach 23., 92., 94. und 122. ist $\Psi(K_1 \pm 0) = \frac{<0}{\pm 0} = \mp\infty$.

Im übrigen ist $\Psi(u_1)$ nach 23. und 30. endlich. Damit ist das Nichtvorhandensein konjugierter Punkte nachgewiesen.

III. Die Größen $\Psi(u_1)$, $\frac{d\Psi(u_1)}{du_1}\Psi(0)$, $\Psi(2K_1)$ u. $\Psi(K_1 \pm 0)$ stimmen mit den entsprechenden Größen in Fall II überein.

Nach 92., 94. und 116. ist $\frac{d\Psi(u_1)}{du_1} > 0$. Es ist $\Psi(0) = 0$.

Nach 40., 92., 94., 123. und 125. ist $\Psi(2K_1) > 0$.

Nach 23., 92., 94. und 125. ist $\Psi(K_1 \pm 0) = \mp\infty$.

Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

B. Wie in Kapitel 4, § 2, Fall B ergibt sich

$\Psi(v) = \Phi(u) + \frac{d}{d\omega}\left[\frac{\pi\alpha}{2K} + K' Z(\alpha)\right]$, wobei $\Phi(u)$ durch 127. gegeben ist. Es ist ferner

$\frac{d\Psi(v)}{dv} = \frac{d\Phi(u)}{du}$, wobei $\frac{d\Phi(u)}{du}$ durch 128. gegeben ist. (Es ist nur h durch $-h$ zu ersetzen.) Es ist $\frac{d\Psi(v)}{dv} < 0$.

Ferner ist nach 11. und 14.

$$\Psi(2nK \pm 0) = \frac{\sqrt{x_1-x_3}^3 k'^2 (1+k^2+w)(1+k^2-2w)}{27\sqrt{3}\,a\,k^2}$$

$$\times \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty \text{ und}$$

$$\Psi'[(2n+1)K \pm 0] = -\frac{\sqrt{x_1 - x_3}^3 (1+k^2+w)(2-k^2-w)}{27\sqrt{3}\, a k^2 k'^2}$$

$$\times \frac{1}{\pm 0} = \pm \infty .$$

Im übrigen $\Psi'(v)$ endlich. Damit ist die Existenz konjugierter Punkte nachgewiesen.

Zusammenstellung der Abkürzungen.

$$\frac{d}{du}[\lg H(u)] = Z_1(u), \frac{d}{du}[\lg \Theta_1(u)] = Z_2(u),$$

$$\vartheta_\alpha(0, \tau') = \Theta_\alpha \quad (\alpha = 0, 2, 3).$$

$\operatorname{sn} u = s$, $\operatorname{cn} u = c$, $\operatorname{dn} u = d$; $\operatorname{sn} \alpha = s_1$, $\operatorname{cn} \alpha = c_1$, $\operatorname{dn} \alpha = d_1$;
$1 - k^2 \operatorname{su}^2 \alpha \operatorname{su}^2 u = N$.

$$\frac{E}{K} = p, \; K(k_1) = K_1, \; K'(k_1) = K_1', \; E(k_1) = E_1 .$$

$$\sqrt{1 - k^2 + k^4} = w, \; e^{\frac{\pi i}{4}} = j .$$

Lebenslauf.

Am 30. Dezember 1900 wurde ich, Rudolf Jacob, als Sohn des Bankprokuristen Ernst Jacob in Stettin geboren. Nach mehrfachem Schulwechsel kam ich Ostern 1912 auf die Oberrealschule Hirschberg i. Rsgb. und legte am 12. November 1919 die Reifeprüfung ab. Von Ostern 1920 bis Herbst 1921 studierte ich an der Universität Berlin und von Herbst 1922 bis Ostern 1928 an der Universität Breslau Mathematik und Naturwissenschaften. Meine Lehrer waren

in Berlin: von Mises, Rademacher, Riehl, Rubens, E. Schmidt und I. Schur;

in Breslau: Buchwald, Hoheisel, Hönigswald, Jüttner, Kneser, Koschmieder, Kühnemann, Pax, Rademacher, Reiche und F. Schur.

Am 15. Mai 1929 legte ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab.

Allen meinen Lehrern fühle ich mich zu großem Dank verpflichtet, ganz besonders Herrn Geheimrat Kneser, dem ich auch die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke.

Rudolf Jacob.